数理解析研究所講究録
286巻 1977年 56-66

葉層構造を保つ微分同相群について

京都産業大 理 福井 和彦

§0. はじめに.

$\mathcal{F}^k$をC^∞級閉多様体M上のC^∞級, 余次元k葉層構造とする。

<u>定義1</u> 微分同相 $f: M \longrightarrow M$ が<u>葉層構造を保つ</u>(<u>葉を保つ</u>)<u>微分同相</u>とは、Mの各点xに対して、$f(L_x) = L_{f(x)}$ ($f(L_x) = L_x$) となることである。ここでL_xはxを通る葉を示す。

$FDiff^r(M, \mathcal{F})$を$(M, \mathcal{F})$の葉層構造を保つC^r級微分同相の全体とする($r \geqq 1$)。明らかに、$FDiff^r(M, \mathcal{F}) \subset Diff^r(M)$が成り立つ。従って、$FDiff^r(M, \mathcal{F})$上の位相を$Diff^r(M)$上の$C^r$-位相より導入する。$FDiff^r(M, \mathcal{F})$が位相群である事は良く知られている。

我々は、この位相群に関して若干の考察を、特にそれが、完全群か否か、即ち、その交換子部分群と一致するかどうかを頭において行う。

§1 定義と定理

定義2. $\mathcal{F}^k$ が n 次元多様体 M^n 上のバンドル葉層構造であるとは、M^n を全空間、ある k 次元多様体を底空間とする C^∞-ファイバー・バンドルであって、各ファイバー（これは $(n-k)$ 次元多様体）を葉とする葉層構造のことである。

定理1 $\mathcal{F}^k$ が M^n 上のバンドル葉層構造であるとする。$\infty > r \geq n+2$ なら、$FDiff_0^r(M^n, \mathcal{F}^k)$ は完全群である。ここで $FDiff_0^r(M^n, \mathcal{F}^k)$ は、$FDiff^r(M^n, \mathcal{F}^k)$ の恒等写像を含む連結成分である。

定義3. 余次元1の葉層構造をもつ compact な多様体 $(W, \mathcal{F}^1)$ $(\partial W \neq \phi)$ が一般 Reeb 型成分であるとは、次の 1), 2), 3) を満たすことである：

1) $\mathrm{Int}\,W$ の中の各葉は、non-compact かつ proper,

2) $\mathrm{Int}\,W$ の中の各葉のホロノミー群は自明,

3) $\mathcal{F}^1$ の compact な葉のホロノミー群の元を局所微分同相 $h : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, $h(0)=0$ とすると、(a) h は恒等写像に 0 で C^∞-tangent, (b) 0 のある近傍で $h'' \geq 0$ 又は $h'' \leq 0$ をみたす。

例 S^3 上の Reeb 葉層構造は一般 Reeb 型成分を含む。又、Lawson [4], 田村 [9], 水谷-田村 [7] の作った葉層構造も、一般 Reeb 型成分を含む。

定理2. $(M, \mathcal{F}^1)$ が一般 Reeb 型成分を含むとする。このとき $\mathrm{FDiff}_0^r(M, \mathcal{F}^1)$ から $S^1 (= SO(2))$ 上への連続な準同型写像が存在する $(r \geqq 1)$。

系3. 上の $(M, \mathcal{F}^1)$ に対して、$\mathrm{FDiff}_0^r(M, \mathcal{F}^1)$ は完全群でない。

定義4. 余次元1の葉層構造をもつ compact な多様体 $(W, \mathcal{F}^1)$ $(\partial W \neq \phi)$ が D-成分 であるとは、次の 1), 2), 3) を満たすことである:

1) $\mathrm{Int}\, W$ の中の各葉は局所稠密,

2) $\mathrm{Int}\, W$ の中の各葉のホロノミー群は自明, そして

3) $\mathcal{F}^1$ の compact な葉のホロノミー群の元を局所微分同相 $h : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, $h(0) = 0$ とすると、h は 0 で恒等写像と C^∞-tangent である。

注意. 1') $\mathrm{Int}\, W$ の中に局所稠密な葉が存在する。 3') $(W, \mathcal{F}^1)$ が $W \cup \partial W \times [0,1]$ 上に $\partial W \times [0,1]$ 内の葉を、$\partial W \times \{t\}$, $0 \leqq t \leqq 1$, の連結成分と定義することにより、C^∞ 葉層構造として拡張出来る。 このとき、条件 1), 2) は条件 1'), 2) と同値, 条件 3) は条件 3') に同値である。

定理4. $(M, \mathcal{F}^1)$ が D-成分を含むとする。このとき、$\mathrm{FDiff}_0^r(M, \mathcal{F}^1)$ から S^1 又は $\mathbb{R}^1$ 上への連続な準同型写像が存在する $(r \geqq 2)$。

系5. 上の $\mathrm{FDiff}_0^r(M, \mathcal{F}^1)$ は完全群でない。

§2　定理2の証明

$(W, \mathcal{F}^1)$ を一般 Reeb 型成分とする。このとき $\mathrm{Int}\, W$ は S^1 上の C^∞-ファイバー・バンドルになることがわかる [2]。$p : \mathrm{Int}\, W \longrightarrow S^1$ を射影とする。このとき、$\mathrm{FDiff}^r_0(W, \mathcal{F}^1)$ の元 f に対して、次の可換図が存在する：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Int}\, W & \xrightarrow{\ f\ } & \mathrm{Int}\, W \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ S^1 & \xrightarrow{\ \bar{f}\ } & S^1 \end{array},$$

ここで $\bar{f} : S^1 \longrightarrow S^1$ は $\mathrm{Diff}^r_0(S^1)$ の元である。写像 g：$\mathrm{FDiff}^r_0(W, \mathcal{F}^1) \longrightarrow \mathrm{Diff}^r_0(S^1)$ を $g(f) = \bar{f}$ $(f \in \mathrm{FDiff}^r_0(W, \mathcal{F}^1))$ で定義する。明らかに、g は連続な準同型である。この時、次の補題が成立する。

<u>補題 1</u>　$\mathrm{Im}\, g = SO(2)$，ここで $SO(2)$ は S^1 の回転群である。

証明は、[1] の補題 1.9 を見よ。

<u>定理 2 の証明</u>．$(M, \mathcal{F}^1)$ が一般 Reeb 型成分を含むとする。このとき、$\mathrm{res} : \mathrm{FDiff}^r_0(M, \mathcal{F}^1) \longrightarrow \mathrm{FDiff}^r_0(W, \mathcal{F}^1|W)$ を W に制限する写像とする。明らかに、res は連続な準同型写像である。写像 g と res の合成写像を π とする，即ち．$\pi = g \circ \mathrm{res}$: $\mathrm{FDiff}^r_0(M, \mathcal{F}^1) \longrightarrow S^1$ 。明らかに、π は連続な準同型だから、定理 2 を証明するためには、π が上への写像である事を示せばよい。

W上の$\mathcal{F}^1|W$に transverse なベクトル場で $\mathrm{Int}\,W$ の各葉と唯一点だけで交わる閉軌道をもつものを X とする。(実は$(W,\mathcal{F}^1)$が一般Reeb型成分なら、そのようなベクトル場がとれて、ファイバー写像 p を $p(x)=C\cap L_x$ で定義する事により、$p:\mathrm{Int}\,W\to C=S^1$ は、ファイバー・バンドルであるを証明するのである[2]。ここで C は上の閉軌道である。) dt を $S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の自然な1-form, $\omega=p^*dt$ を $\mathrm{Int}\,W$ 上の1-formとする。その時、$\mathrm{Int}\,W$ 上の正値関数 g で $\omega(gX)\equiv 1$ を満たすものが存在する。そこで φ_t をベクトル場 gX に同伴な flow とする。φ_t は $\mathrm{Int}\,W$ 上葉層構造を保つ微分同相を与える。更に $\partial W\ni z$ に対して、$\varphi_t(z)=z$ とおく事により、φ_t は W上葉層構造を保つ C^∞級 flow でかつ、∂W で恒等写像に C^∞-tangent であることがわかる([1]の注意1.5を見よ)。さて、$S^1(=SO(2))$ の元 t に対して、$(M,\mathcal{F}^1)$ の葉層構造を保つ微分同相 f として、

$$f|(W,\mathcal{F}^1|W)=\varphi_t\ ,\quad f|W\text{の外}=\text{恒等写像}$$

で定義すると、この f は $\mathrm{FDiff}^r_0(M,\mathcal{F}^1)$ の元であり、$\pi(f)=\mathcal{F}=t$ を満たす。　　証明終り。

§3. 定理3の証明

$\mathrm{LDiff}^r(M,\mathcal{F})$ を葉を保つ C^r級微分同相群とする。これは、$\mathrm{FDiff}^r(M,\mathcal{F})$ の正規部分群である。$\mathrm{FDiff}^r(W,\partial W,\mathcal{F})$,

$LDiff^r(W, \partial W, \mathcal{F})$ を夫々 $FDiff^r(W, \mathcal{F})$, $LDiff^r(W, \mathcal{F})$ の部分群で ∂W で恒等写像と C^r-tangent なものであるとする。

補題2. $(W, \mathcal{F})$ を D-成分とする。このとき、自然な包含写像 ι : $FDiff^r_0(W, \partial W, \mathcal{F}) / LDiff^r_0(W, \partial W, \mathcal{F}) \longrightarrow FDiff^r_0(W, \mathcal{F}) / LDiff^r_0(W, \mathcal{F})$ は、位相群として同型である。

証明 単射は明らかだから、全射である事を示す。それには、$FDiff^r_0(W, \mathcal{F})$ の任意の元 f に対して、$LDiff^r_0(W, \mathcal{F})$ の元を作用させて、$FDiff^r_0(W, \partial W, \mathcal{F})$ の元を作ればよい。

X を $\mathcal{F}$ に transverse な W のベクトル場とする。このとき、∂W の近傍で、f は X の各軌道を保つとしてよい（[1] の主張 1.10 を見よ）。従って $f|\partial W$ = 恒等写像が成立している。更にこの f は、∂W で恒等写像と C^∞-tangent である。何故なら $T(=[0,\infty))$ を X の1つの軌道とする（0 は ∂W の点 z に対応しているとする）。0 の近傍 $[0, \varepsilon)$ で、次の不等式が成立する：

ある自然数 n_0 に対し、$x > f(x) \geqq \Phi^{n_0}(x)$ 又は、$x < f(x) \leqq \Phi^{-n_0}(x)$ $(x \in [0, \varepsilon))$ ここで Φ は z でのホロノミーの代表元である。

定義4の条件3)より Φ^{n_0} (Φ^{-n_0}) は 0 で恒等写像に C^∞-tangent である。従って f も C^∞-tangent である。証明終り。

補題3. $(W, \mathcal{F}')$ を D-成分とする。このとき $\mathcal{F}'$ の任意の葉 L に対して、$\overline{L} = W$ が成り立つ。

<u>証明</u>　$\mathrm{Int}\,W$ において Reeb [8] の A.II.11 を応用すると、L は $\mathrm{Int}\,W$ の中で、致るところ稠密である。従って $\mathrm{Int}\,W$ の各葉 L に対して $\overline{L} \supset \partial W$ を示せばよい。これに対しては今西-八木 [2, 補題 2.4] で示されている。　　　　証明終り。

<u>補題 4</u>.　$(W, \mathcal{F}^1)$ を D-成分とする。このとき $\mathrm{FDiff}_0^r(W, \mathcal{F}^1)$ の元であるが $\mathrm{LDiff}^r(W, \mathcal{F}^1)$ の元でないものが存在する。

<u>証明</u>. Sackstedder の定理 [3] より、W 上に $\mathcal{F}^1$ を保つ topological flow ρ が存在する ($\partial W \ni x$ に対して $\rho(x, t) = x$)。各 t_0 に対して $\rho(\cdot, t_0)$ は $\mathrm{Int}\,W$ で C^∞ 級である。よって ∂W で ρ が C^∞ 級であることを示せばよい。しかし、$\rho(\cdot, 1)$ は (∂W の近傍で) X の各軌道上でホロノミー群の代表元である。従って、$\rho(\cdot, 1)$ は ∂W で C^∞ 級である。$\rho(\rho(x, t), s) = \rho(x, t+s) = \rho(\rho(x, s), t)$ であるから、任意の t $(0 \leq t \leq 1)$ に対して、$\rho(\cdot, t)$ は ∂W で C^∞ 級である。　　　　証明終り。

<u>Leslie の定理</u> [5]　$\mathcal{F}^q$ を M^n 上の余次元 q C^r 級葉層構造とする ($r \geq 2$)。局所稠密な葉 $L_1, \cdots, L_k$ で $\overline{L_1 \cup \cdots \cup L_k} = M$ なるものが存在するとする。このとき $\mathrm{FDiff}_0^r(M, \mathcal{F}^q) / \mathrm{LDiff}_0^r(M, \mathcal{F}^q)$ は $q \cdot k$ 次元以下のリー群である。

この定理を使って次の命題を証明する事が出来る。

<u>命題 1</u>　$(W, \mathcal{F}^1)$ を D-成分とする。このとき、$\mathrm{FDiff}_0^r(W, \mathcal{F}^1) / \mathrm{LDiff}_0^r(W, \mathcal{F}^1)$ は 1 次元リー群と同型である。

証明　$M = W \cup W$ とする。Leslie の定理と補題3によって $FDiff_0^r(M, \mathcal{F}^1) / LDiff_0^r(M, \mathcal{F}^1)$ は 1・2 次元以下のリー群である。

次の可換図を考える。簡単のために $FDiff_0^r(\ ,\mathcal{F})$, $LDiff_0^r(\ ,\mathcal{F})$ のかわりに $D_{\mathcal{F}}(\ )$, $D_{I\mathcal{F}}(\ )$ とかく。

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & D_{I\mathcal{F}}(W,\partial W) \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & D_{\mathcal{F}}(W,\partial W) \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & D_{\mathcal{F}}(W,\partial W)/D_{I\mathcal{F}}(W,\partial W) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & D_{I\mathcal{F}}(M) \arrow[r] \arrow[d, "res"] & D_{\mathcal{F}}(M) \arrow[r] \arrow[d, "res"] & D_{\mathcal{F}}(M)/D_{I\mathcal{F}}(M) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & D_{I\mathcal{F}}(W) \arrow[r] & D_{\mathcal{F}}(W) \arrow[r] & D_{\mathcal{F}}(W)/D_{I\mathcal{F}}(W) \arrow[r] \arrow[d, "①"] & 0 \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

縦，横の列は全て完全列である。更に各写像は連続である。

①は、補題2から出る。従って $D_{\mathcal{F}}(W,\partial W)/D_{I\mathcal{F}}(W,\partial W)$ は．$D_{\mathcal{F}}(M)/D_{I\mathcal{F}}(M)$ の閉部分群である。更に補題4より．$D_{\mathcal{F}}(W,\partial W)/D_{I\mathcal{F}}(W,\partial W)$ は1点ではない。よって $D_{\mathcal{F}}(W)/D_{I\mathcal{F}}(W)$ は1次元リー群である。　　　　証明終り。

定理3の証明．$(M, \mathcal{F}^1)$ は．D－成分 $(W, \mathcal{F}^1|W)$ を含むとする。W への制限写像を $res : FDiff_0^r(M, \mathcal{F}^1) \longrightarrow FDiff_0^r(W, \mathcal{F}^1|W)$ とする。次の合成写像 $FDiff_0^r(M, \mathcal{F}^1) \xrightarrow{res} FDiff_0^r(W, \mathcal{F}^1|W) \longrightarrow FDiff_0^r(W, \mathcal{F}^1|W) / LDiff_0^r(W, \mathcal{F}^1|W)$ が上への連続準同型写像である事を示す。

補題2より、$FDiff_0^r(W,\mathcal{F}^1|W)/LDiff_0^r(W,\mathcal{F}^1|W)$ の各元は $FDiff_0^r(W,\partial W,\mathcal{F}^1)$ の元 g で代表される。従って $FDiff_0^r(M,\mathcal{F}^1)$ の元として、W上で g、W^c 上で恒等写像とすればよい。命題1より定理が得られる。

証明終り。

§4. 定理1の証明の概略

補題5　$\mathcal{F}^k$ を M^n 上、余次元 k のバンドル葉層構造とする。このとき $FDiff_0^r(M^n,\mathcal{F}^k)$ の任意の元 f は、$f=f_1\circ f_2\circ\cdots\circ f_\ell$ とかける。ここで各 f_i $(1\leqq i\leqq \ell)$ は、M の近傍 $U_{k_i}\times V_{j_i}$ 上で次のようにかける；

$$\begin{array}{rccc} f_i \ : & U_{k_i}\times V_{j_i} & \longrightarrow & U_{k_i}\times V_{j_i} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (x,y) & \longmapsto & (f_i^1(x),\ f_i^2(x,y)) \end{array}$$ で、

(1) U_{k_i} は $\mathbb{R}^k$ に、V_{j_i} は $\mathbb{R}^{n-k}$ に同相 $(1\leqq i\leqq \ell)$,

(2) $\bigcup_{i=1}^{\ell}(U_{k_i}\times V_{j_i})=M$,　そして、

(3) $U_{k_i}^c\ni x$ に対して $f_i^1(x)=x$, $(U_{k_i}\times V_{j_i})^c\ni(x,y)$ に対して、$f_i^2(x,y)=y$ 　をみたす。

従って、次のような $\mathbb{R}^n$ の C^r 級微分同相が交換子でかけることを証明すればよいことになる。

$$\begin{array}{rccc} f \ : & \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-k} & \longrightarrow & \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-k} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (x,y) & \longmapsto & (f_1(x),\ f_2(x,y)) \end{array}$$ C^r級微分同相で、

(1) $\mathbb{R}^k$ の compact 集合の外で $f_1=$ 恒等写像,

$\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ の compact 集合の外の元 (x, y) に対して $f_2(x,y) = y$

(2) f は恒等写像に C^r-位相の意味で近い。

上のような f の集合を $\mathcal{L}^r$ とかく。もちろん $\mathcal{L}^r$ に C^r-位相を導入しておく。

<u>定理 6</u> $\infty > r \geq n+2$ なら、$\mathcal{L}^r$ は完全群である。

証明は、Mather [6] のアナロジーであるから省略する。

REFERENCES

[1] K. Fukui, *On the homotopy type of some subgroups of* Diff (M^3), 数理解析研究所講究録 257, 1-31.

[2] H. Imanishi and K. Yagi, *On Reeb components*, J. Math. Kyoto Univ.,

[3] H. Imanishi, *Structure of codimension one foliations which are almost without holonomy*, (preprint)

[4] H. B. Lawson, *Codimension-one foliations of spheres*, Ann. of Math., 94 (1971), 494-503.

[5] J. Leslie, *A remark on the group of automorphisms of a foliation having a dense leaf*, J. Diff. Geom., 7 (1972), 597-601.

[6] J. Mather, *Commutators of diffeomorphisms*, Comment. Math. Helv., 49 (1974), 512-528.

[7] T. Mizutani and I. Tamura, *Foliations of even dimensional*

manifolds, Proceedings of the International Conference on Manifolds and Related Topics in Topology, Tokyo, 1973, 189-194.

[8] G. Reeb, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Act. Sci. Ind. Herman, Paris, 1183 (1952), 83-154.

[9] I. Tamura, Specially spinnable manifolds, Proceedings of the International Conference on Manifolds and Related Topics in Topology, Tokyo, 1973, 181-187.